Komplexe Modelle in Excel

Optionspreisbewertung nach Hull-White mit Excel


Kolumne

09. November 2020, 07:19

Ingo Schmidt | Johannes Krah

Optionspreisbewertung nach Hull-White und Excel – auf den ersten Blick mögen diese Welten nicht zusammenpassen. Wird Excel zwar von vielen Menschen alltäglich genutzt, so ist es doch ebenso bekannt für seine Schwächen. Siehe die erst kürzlich veröffentlichte falsche Berechnung der Corona-Zahlen in Großbritannien. Oder auch diese Meldung aus der Süddeutschen Zeitung vom 9. August 2020: "Wenn sich die Genforschung der Logik von Excel unterwirft". Wieso sollte man also komplexe Modelle in Excel berechnen, wenn man doch aus einem großen Topf geeigneterer Software wählen kann?

Die Antwort liegt im Anwendungsfall. In unserem sollte kein neues Produktivsystem gebaut werden. Unsere Aufgabe war es, ein finanzmathematisches Modell didaktisch so aufzubereiten, dass es möglichst einfach und detailliert nachvollzogen werden kann. Darüber hinaus sollten Werte der vorhandenen Software auf Plausibilität getestet werden. Konkret ging es um die Bewertung von Swaptions mit dem Hull-White Modell.

Unter der Annahme, dass die zukünftige Zinsrate sich als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung auffassen lässt, wird im Hull-White Modell mit Hilfe von Trinomialbäumen über einem diskreten Zeitgitter ein Erwartungswert für die Option berechnet, welche die genaue Lösung der Differentialgleichung approximieren.

Mitarbeitende befähigen, jeden Berechnungsschritt zu verstehen

Softwareseitig gibt es schon hinreichend viele Implementierungen des Modells in den verschiedensten Varianten. Wir aber wollten kein Produktivsystem schaffen, welches möglichst automatisiert Preise berechnet – wir wollten Mitarbeitern, welche weder in die mathematische Tiefe des Modells, noch in die Tiefe der Programmierung einsteigen wollen, vermitteln, wie die Berechnung funktioniert und ihnen die Möglichkeit geben, jeden einzelnen Berechnungsschritt zu verstehen. Und genau hierfür bietet Excel schon alles, was wir brauchen.

Jeder Mitarbeiter hat schon einmal in Excel Arbeitsmappen gearbeitet – somit ist die Hemmschwelle, sich dort mit der Berechnung zu beschäftigen, sehr gering. Dadurch, dass alle Zwischenergebnisse in Zellen ausgegeben werden, können alle Berechnungsschritte nachvollzogen und das eigene Verständnis überprüft werden.

Das Hull-White-Modell

Wir wollen zunächst einmal den Aufbau des Hull-White-Modells skizzieren, damit wir nachvollziehen können, wie eine Lösung in Excel strukturiert sein muss (eine genauere Betrachtung des Hull-White-Modells bietet der Artikel "The General Hull-White Model and Super Calibration" von John Hull und Alan White, August 2000).

Im Hull-White Modell nehmen wir an, dass die Zinsrate *r* (abhängig von der Zeit *t*) die Gleichung

$$dr(t) = \big(\theta(t) - a(t)r(t)\big)dt + \sigma(t)dW(t)$$

löst. (Der geneigte Leser bemerke, dass θ,σ und *a* deterministische Funktionen und *W* ein Wiener Prozess sind.)

Die Funktion σ kann hierbei als Volatilität der Optionen aufgefasst werden und wird uns wieder begegnen.

Von der mathematischen Seite her würden wir uns wünschen, die Lösung *r* explizit zu kennen, dann könnten wir einen erwarteten Wert eines Swaps ohne Optionen berechnen.

Mit aktuellem Forschungsstand ist das beliebige Lösen von stochastischen Differentialgleichungen jedoch nicht möglich und es ist auch nicht zu erwarten, dass sich dies zeitnah ändert. Wir können jedoch die implizit gegebene Lösung durch ein numerisches Verfahren approximieren. Genau dieses Verfahren müssen wir zur Berechnung auch in Excel umsetzen.

Im Groben können wir uns dieses Verfahren wie folgt vorstellen:

Wir diskretisieren den zeitstetigen Prozess r nun zunächst in der Zeit und wählen dann zu jedem der nun endlich vielen Zeitpunkte endlich viele Zustände aus, die mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

Im Zeitpunkt 0 sei dies nur ein Zustand, nämlich der aktuelle Zins. Ausgehend davon wollen wir annehmen, dass die Zinskurve nur drei verschiedene Zustände im nächsten Schritt annehmen kann. Im darauffolgenden Schritt können aus jedem dieser drei Zustände jeweils wieder nur drei erreicht werden usw. Es ergibt sich ein Trinomialbaum. Dies wird an Abb. 01 illustriert.

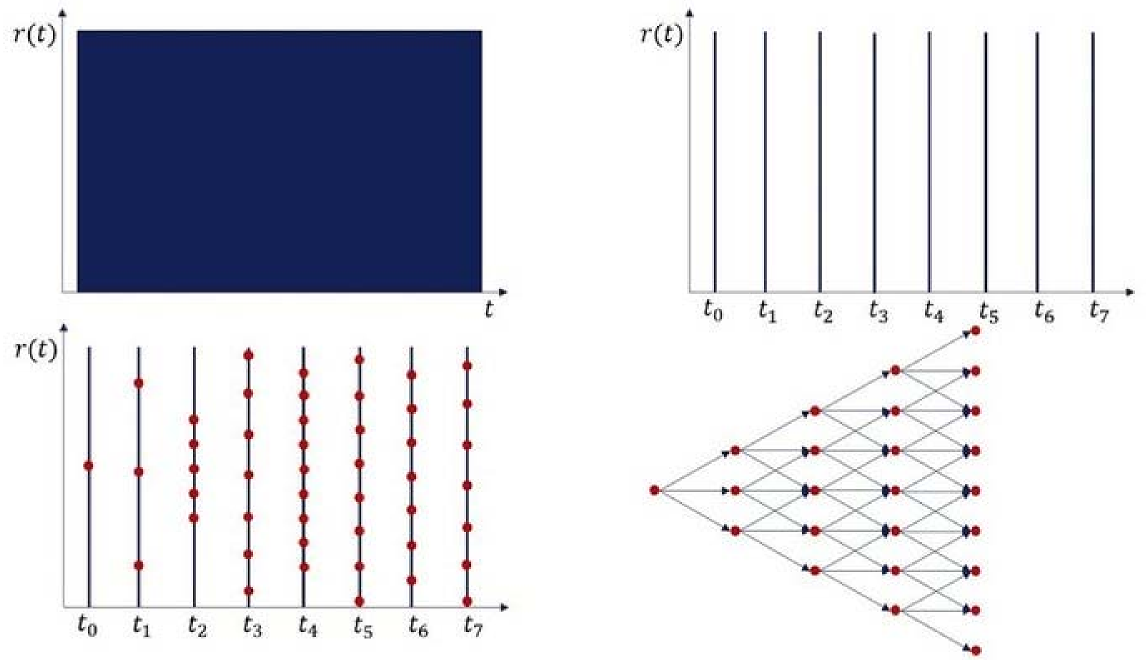

Abb. 01: Entstehung eines Trinomialbaums

Beginnend im Nordwesten der Graphik sehen wir alle möglichen Zinssätze zu allen möglichen Zeitpunkten durch einen Punkt im Graphen abgetragen. Da a priori jeder denkbare Zeitpunkt *t* und jeder Wert von *r(t)* denkbar ist, ergibt sich optisch eine gefüllte Fläche.

Nun wählen wir endlich viele Zeitpunkte auf unserer Zeitachse aus, im Nordosten der Graphik sind dies gerade acht. Zu diesen Zeitpunkten möchten wir den Zinssatz $r(t_i)$ in Erfahrung bringen. Im Graphen sind nun alle möglichen Werte der Zufallsvariable $r(t_i)$ vertikal abgetragen.

Heuristisch kann man sich an dieser Stelle nun vorstellen, dass mit feiner werdendem

Zeitgitter die Genauigkeit der Approximation steigt.

Wir müssen für eine explizite Berechnung jedoch nun weiter reduzieren, so gelangen wir in den Südwesten der Graphik: Die roten Punkte stellen endlich viele Auswahlen von "möglichst wahrscheinlichen Zuständen" der Zufallsvariablen $r(t_i)$ an.

Zuletzt werden dann die möglichen Wege des Prozesses durch Pfeile gekennzeichnet und entsprechende Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet.

Hierbei werden die Knoten des Trinomialbaums rekursiv über fortschreitende Tiefe des Baumes bestimmt. Die "Knoten mit möglichst hoher Übergangswahrscheinlichkeit" lassen sich durch geschlossene Formeln bestimmen, jedoch sind die resultierenden Bäume im Allgemeinen nicht rekombinierend, d. h. die Wege "erst einen hochgehen, dann einen runtergehen" und "erst einen runtergehen, dann einen hochgehen" führen nicht zwingend zu demselben Ergebnis, können es aber eventuell tun (wie alle Wege in unserer Graphik). In Gedanken an die Herausforderungen an Excel wollen wir dies im Hinterkopf behalten.

Damit in jedem Rekursionsschritt die Knoten bestimmt werden können, brauchen wir noch zusätzliche Informationen. Wir müssen die Volatilität σ besser verstehen. Da wir diese nach oben beschriebenen Diskretisierungsschritte nur an endlich vielen Zeitpunkten kennen müssen, müssen wir nur endlich viele Auswertungen von σ berechnen und somit können wir σ als Vektor auffassen. Diese Werte approximieren wir durch eine Kalibrierung bzgl. ausgewählten Referenzgeschäften. D. h. wir wählen zu jedem Ausübungszeitpunkt unseres diskreten Zeitgitters ein Referenzgeschäft aus, welches die gleichen Kennziffern wie unser Teilgeschäft der Swaption aufweist. Von dem Referenzgeschäft kennen wir den Preis und für jeden Volatilitätsvektor können wir einen Modellpreis berechnen. Führen wir dies für alle Ausübungszeitpunkte durch, so erhalten wir zwei Vektoren von Preisen und ein Vektor ist abhängig von unserem gesuchten Volatilitätsvektor. Den Abstand dieser zwei Preisvektoren können wir nun minimieren und erhalten damit eine gute Schätzung für unsere Volatilitäten.

Der geneigte Excel-Enthusiast merkt nun: ein mehrdimensionales Minimierungsproblem lässt sich auch nicht ohne Weiteres in Excel lösen, aber auch dies geht.

Wenn wir nun also unseren Trinomialbaum aufgestellt haben, so können wir mit der Bewertung beginnen. Der Wert der Swaption kann nun per Rückwärtsinduktion als Erwartungswert gebildet werden, denn zu jedem Knoten des Trinomialbaums, kennen wir ja die Zinsrate $r(t)$.

Spezielle Herausforderungen?

Wo liegen spezielle Herausforderungen bei der Umsetzung in Excel?

Geschlossene Formeln lassen sich in Excel problemfrei über die normalen Zellen berechnen, so wie es auch bei jedem privaten Tilgungsplan für ein Darlehen bei vielen Menschen geschieht.

Schwierig sind lediglich zwei Punkte: Zunächst das Minimierungsproblem. Zwei Lösungsmöglichkeiten eröffnen sich, entweder man implementiert einen Lösungsalgorithmus in VBA, oder man nutzt den Excel-Solver, welcher in Excel mitgeliefert wird.
Wollte man konkrete Daten exakt prüfen, so kämen man nicht drum herum, den in der vorhandenen Software genutzten Algorithmus zu implementieren. Aber das sollte hier nicht unser Ziel sein. Berechnen wir doch deswegen besser die zu minimierende Funktion über die gewöhnlichen Excel Zellen und nutzen dann den Excel-Solver. Gerade in Hinblick auf den didaktischen Wert ist bei dieser Wahl die Nachvollziehbarkeit einzelner Rechnungen schneller gegeben.

Die zweite Herausforderung ist die geometrische Struktur der Trinomialbäume

Wie oben bemerkt sind die Bäume im Allgemeinen nicht rekombinierend. Das bedeutet, es ist nicht klar, wie viele Zellen zur Darstellung des Baumes benötigt werden, im schlimmsten Fall sogar 3^{n-1} für den letzten Zeitpunkt der Berechnung.

Hilfreich: VBA

An dieser Stelle schafft VBA Abhilfe, sodass wir die Struktur unserer Bäume dynamisch gestalten können. Über ein Skript lässt sich die Anzahl der Knoten im nächsten Schritt des Baumaufbaus berechnen und die Ergebnisse können in das Arbeitsblatt geschrieben werden. An dieser Stelle werden die Trinomialbäume wieder in Excel Arbeitsblättern visualisiert, dies ist einerseits ungemein hilfreich für das Verständnis der Berechnung und andererseits lässt es den Anwender den Überblick über die Zwischenergebnisse behalten. Die Weiterverarbeitung dieser Bäume kann dann händisch über weitere Excel-Formeln in Zellen oder aber über weitere VBA Skripte geschehen.

Dies erfordert jedoch auch erneut eine Entscheidung: Führt man die oben erwähnte Rückwärtsinduktion über den Trinomialbaum lediglich über Excel-Zellen durch, so erfordert dies manuelle Anpassungen für jede geometrische Struktur der Bäume.

Ebenso kann aber auch die Rückwärtsinduktion mit einem VBA Skript gelöst werden, dann verhält sich auch diese entsprechend dynamisch.

Mit diesen Anpassungen können wir nun eine große Klasse an Beispielen abbilden und generieren. VBA stellt hierbei die entscheidende Hilfe dar, sodass für ein neues Beispiel nicht die geometrische Struktur der Bäume per Hand angepasst werden muss.

Für weitere Automatisierungs- und Abstraktionsschritte in der Berechnung können nun Stück für Stück mehr Teile der Berechnung in den Excel Arbeitsblättern nach VBA verschoben werden. Das Resultat ist eine stufenweise Heranführung an eine möglichst vollständige Abbildung der vorhandenen Software.

Fazit

Excel gibt uns alle Möglichkeiten, Berechnungen nach dem Hull-White-Modell durchzuführen. Der besondere Vorteil dabei: Der Lerneffekt. Mitarbeitende werden in ihrer Komfortzone - Excel ist ihnen vertraut - an ihrem aktuellen Kenntnisstand abgeholt und Stück für Stück tiefer in die Berechnungsmaterie eingeführt. Das Verständnis für komplexe Berechnungen wächst.

Autoren:

Ingo Schmidt | Bankfachberater | Business Analyst | Beckmann & Partner CONSULT | Bielefeld

Johannes Krah | Werkstudent Business Analyse | Beckmann & Partner CONSULT | Bielefeld

Quellenverzeichnis und weiterführende Literaturhinweise:

The Guardian (2020): England Covid cases error means 50,000 contacts may not have been traced, 05.10.2020.

Süddeutschen Zeitung(2020): Wenn sich die Genforschung der Logik von Excel unterwirft, 9. August 2020.

Hull, John/White, Alan (2000): The General Hull-White Model and Super Calibration, August 2000.

[Bildquelle: Adobe Stock.com / christianchan]